

Comparación de la intensidad espacial de volcanes de pequeño volumen en dos campos volcánicos en México mediante el uso de procesos puntuales de Poisson

Comparison of the spatial intensity of small-volume volcanoes in two volcanic fields in Mexico by using Poisson point pattern analysis

Miguel Ángel Peñaloza Pérez ^a | Sergio Francisco Juárez Cerrillo ^b
Katrin Sieron ^c | Francisco Córdoba-Montiel ^d | Rafael Torres-Orozco ^e

Recibido: 22 de agosto de 2023.

Aceptado: 12 de febrero de 2024.

^a Observatorio Sismológico y Vulcanológico de Veracruz (OSV), Facultad de Estadística, Universidad Veracruzana. Xalapa, México. Contacto: zs19013278@estudiantes.uv.mx | ORCID: [0000-0002-8556-7609](https://orcid.org/0000-0002-8556-7609)

^b Observatorio Sismológico y Vulcanológico de Veracruz (OSV), Facultad de Estadística, Universidad Veracruzana. Xalapa, México. Contacto: sejuarez@uv.mx | ORCID: [0000-0002-5713-7644](https://orcid.org/0000-0002-5713-7644) *Autor para correspondencia.

^c Observatorio Sismológico y Vulcanológico de Veracruz (OSV), Centro de Ciencias de la Tierra, Universidad Veracruzana. Xalapa, México. Contacto: ksieron@uv.mx | ORCID: [0000-0002-4036-9107](https://orcid.org/0000-0002-4036-9107)

^d Observatorio Sismológico y Vulcanológico de Veracruz (OSV), Centro de Ciencias de la Tierra, Universidad Veracruzana. Xalapa, México. Contacto: fcordoba@uv.mx | ORCID: [0000-0002-9111-2336](https://orcid.org/0000-0002-9111-2336)

^e Observatorio Sismológico y Vulcanológico de Veracruz (OSV), Centro de Ciencias de la Tierra, Universidad Veracruzana. Xalapa, México. Contacto: rraftorres@uv.mx | ORCID: [0000-0003-2214-9829](https://orcid.org/0000-0003-2214-9829)

Cómo citar:

Peñaloza-Pérez, M., Juárez-Cerrillo, S., Sieron, K., Córdoba-Montiel, F. y Torres-Orozco, R. (2024). Comparación de la intensidad espacial de volcanes de pequeño volumen en dos campos volcánicos en México mediante el uso de procesos puntuales de Poisson. *UVserva*, (17), 3-18. <https://doi.org/10.25009/uvs.vi17.2987>

Resumen: Los volcanes de pequeño volumen son los más abundantes en México y el mundo. Estos volcanes tienden a agruparse en el espacio formando lo que se conoce como campos volcánicos. Aquí se aplican técnicas de patrones puntuales espaciales para comparar el comportamiento de la intensidad espacial de los campos volcánicos de la Sierra Chichinautzin y Los Tuxtlas. Las intensidades espaciales se ajustan con modelos de procesos de Poisson no homogéneos. Posteriormente, se aplica una prueba de permutaciones, para esta se propone un estadístico de prueba basado en la razón de verosimilitudes de los modelos ajustados. Los resultados de la prueba de permutaciones presentaron evidencia para rechazar la hipótesis de igualdad de intensidades espaciales entre los campos volcánicos de la Sierra Chichinautzin y Los Tuxtlas. El intercepto del modelo ajustado del campo volcánico de Los Tuxtlas estima una intensidad (volcanes por unidad de área) de 0.42, mientras que el intercepto del modelo ajustado de la intensidad del campo volcánico Sierra Chichinautzin fue de 0.40 unidades.

Palabras clave: Volcán monogenético; estadística espacial; intensidad espacial; procesos puntuales de Poisson; máxima verosimilitud; pruebas de permutaciones.

Abstract: *Small-volume volcanoes are the most abundant in Mexico and worldwide and tend to cluster in space (volcanic fields). Here, spatial point pattern techniques are applied to compare the behavior of the spatial intensity of the Sierra Chichinautzin and Los Tuxtlas volcanic fields. Spatial intensities are fitted with inhomogeneous Poisson process models. Subsequently, a permutations test is applied, the likelihood ratio of the fitted models is proposed as a test statistic. The results of the permutations test provided evidence to reject the hypothesis of equality of spatial intensities between the volcanic fields of Sierra Chichinautzin and Los Tuxtlas. The intercept of the fitted model of the Los Tuxtlas volcanic field estimates an intensity (volcanoes per unit area) of 0.42 while the intercept of the fitted model of the intensity of the Sierra Chichinautzin volcanic field was 0.40 units.*

Keywords: *Student autonomy; Virtual modality; equity; High education.*

Introducción

En México, el vulcanismo activo se observa a lo largo del Cinturón Volcánico Trans-Mexicano (CVTM) que se extiende de oeste a este a través del centro del país y es producto de la subducción de las placas Rivera y Cocos debajo de la Norteamericana. A lo largo del CVTM, volcanes de diferentes tipos se distribuyen de forma irregular (Connor, 1990). Además de los volcanes de grandes dimensiones, como el Pico de Orizaba o el Colima –que son longevos y de los cuales hay unas pocas decenas en el país–, los volcanes de pequeñas dimensiones ocurren por miles en México (Connor, 1990; Ferrari *et al.*, 2012). Estos volcanes han sido comúnmente denominados como “monogenéticos”, dado que muchos de ellos muestran actividad en un corto y único

periodo de tiempo. No obstante, actualmente se ha demostrado que muchos de estos volcanes pueden o han hecho erupción en más de una ocasión (Hopkins *et al.*, 2021), por lo que no pueden estrictamente clasificarse como monogenéticos, en su lugar se ha adoptado el término “volcanes de pequeño volumen”. Asimismo, estos volcanes presentan la tendencia a agruparse en el espacio, formando grandes campos volcánicos con cientos de volcanes individuales (Le Corvec *et al.*, 2013).

Dado que el nacimiento de volcanes en un campo volcánico es el producto (parcialmente) observado de un sistema complejo, datos vulcanológicos son, por ende, estocásticos de por sí, de acuerdo con Bebbington (2009). Es oportuno aclarar que se asume un comportamiento “aleatorio” porque se desconocen las leyes fundamentales, ya sean físicas o químicas, que rigen su comportamiento. Una forma de estudiar los fenómenos naturales con comportamiento aleatorio es desde las matemáticas con el uso de los procesos estocásticos. Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias que cambian con el tiempo (Doob, 1990; Steele, 2001).

De acuerdo con Gelfand *et al.* (2010), los modelos estocásticos se pueden dividir en dos grupos, el primero llamado mecanicista en donde el modelo incluye leyes fundamentales como la física y la química. Dichos modelos son difíciles de desarrollar, ya que requieren de parámetros particulares para aplicarlos y un conocimiento profundo del fenómeno que se desea modelar.

Por otro lado, están los modelos estadísticos los cuales se basan en la probabilidad y la inferencia estadística. Estos modelos no consideran a las leyes fundamentales que hay detrás de los fenómenos. Su construcción es más sencilla, ya que no requieren de un conocimiento profundo del fenómeno a estudiar, ni de parámetros particulares. Tradicionalmente los procesos estocásticos se utilizan para estudiar fenómenos que varían a lo largo del tiempo; sin embargo, también es posible el estudio, con procesos estocásticos, de fenómenos que varían en el espacio. Dentro de los procesos estocásticos espaciales, se encuentra una disciplina que es la teoría de los procesos estocásticos espaciales puntuales (Boots y Getis, 1988).

La teoría de los procesos puntuales espaciales proporciona las herramientas para describir el mecanismo que genera ubicaciones espaciales de eventos de interés para el investigador. Los procesos puntuales espaciales describen al mecanismo generador de la ocurrencia del fenómeno en el espacio. Un patrón puntual espacial es un conjunto de puntos en un espacio bien definido.

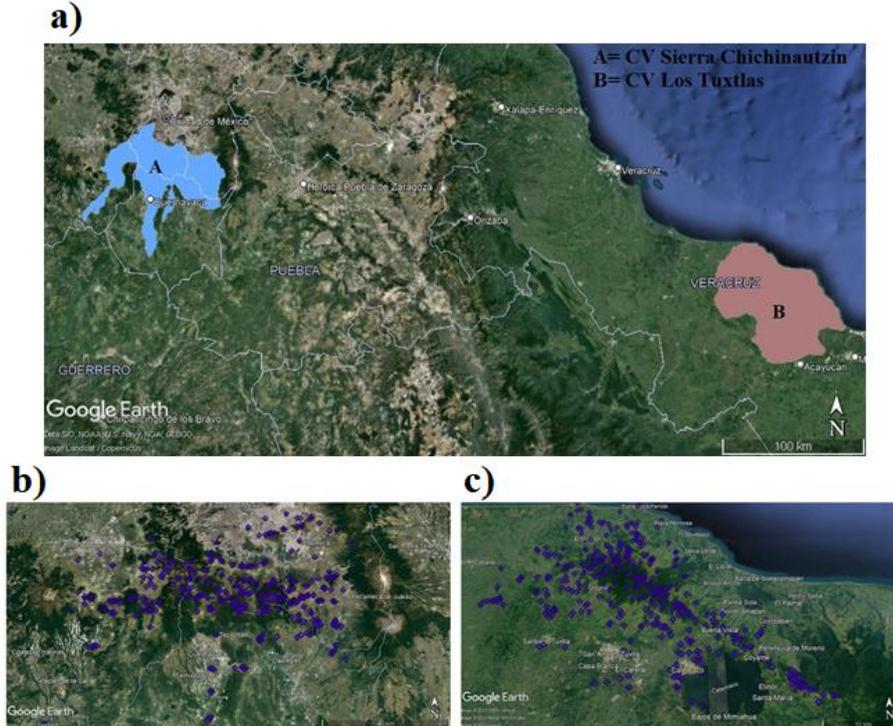
Este patrón puntual es generado por un proceso estocástico (proceso puntual), es decir, por un mecanismo aleatorio que genera eventos que son ubicaciones que ocurren de manera aleatoria en el espacio de estudio (Baddeley *et al.*, 2015).

La ubicación de volcanes individuales dentro de un campo volcánico, producto de nuevos nacimientos de volcanes en el tiempo, se puede expresar como un “punto” en el espacio a través de sus coordenadas. La disposición espacial de los volcanes dentro de los campos volcánicos es de gran interés, ya que comprender el patrón de los volcanes individuales a lo largo del tiempo y el espacio es la base para cualquier análisis de riesgos posterior.

Los patrones puntuales espaciales son una herramienta útil en el estudio de estos fenómenos, ya que contribuyen a la descripción y caracterización de la distribución de la ubicación de los volcanes, así como a mejorar la comprensión de su estructura espacial.

Así también, facilitan la detección de agrupamientos y ayudan a modelar los procesos que intentan explicar los mecanismos que generan la distribución y tendencia de los eventos en el espacio. En este trabajo se determinan y comparan las intensidades (volcanes por unidad de área) de dos campos volcánicos de México que se consideran activos, se ubican cerca de grandes ciudades o generalmente en áreas pobladas y se conocen las ubicaciones de sus miembros gracias a estudios anteriores (Sieron *et al.*, 2021; 2023; Vivo, 2017; Jaimes-Viera *et al.*, 2018). La **Figura 1** muestra a los dos campos volcánicos que se estudian en este trabajo.

Figura 1
 Ubicación de los campos volcánicos Chichinautzin y Los Tuxtlas



Nota: a) Ubicación de los campos volcánicos Chichinautzin y Los Tuxtlas, A y B, en el centro y este del país. b) Los puntos azules son los volcanes que conforman el campo volcánico Sierra Chichinautzin. c) Los puntos azules son los volcanes que conforman el campo volcánico Los Tuxtlas.

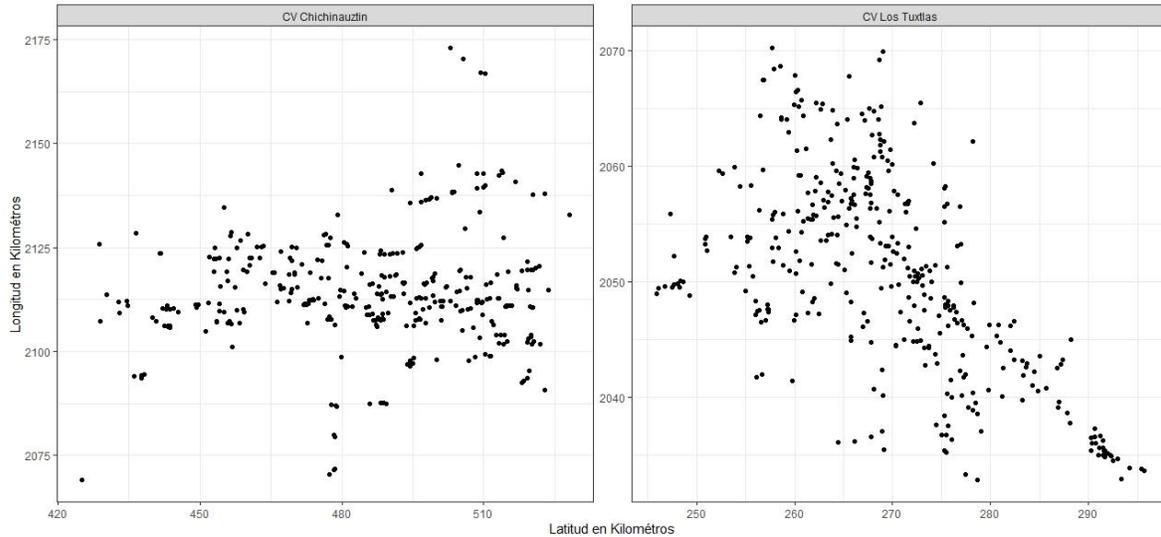
Fuente: Elaboración propia.

1. Metodología

La base de datos utilizada en este trabajo contiene las ubicaciones de los volcanes individuales de los dos campos volcánicos en el espacio, expresados en coordenadas (**Figura 2**). Las coordenadas de los volcanes monogenéticos han sido anteriormente publicadas (Sieron *et al.*, 2021; Sieron *et al.*, 2023) y han sido derivados de análisis de imágenes satelitales y trabajo de campo. El campo Sierra Chichinautzin tiene casi 11

km² y tiene 356 volcanes individuales; mientras que el campo Los Tuxtlas tiene casi dos mil km² y 368 volcanes.

Figura 2
 Coordenadas en km de las ubicaciones de los volcanes



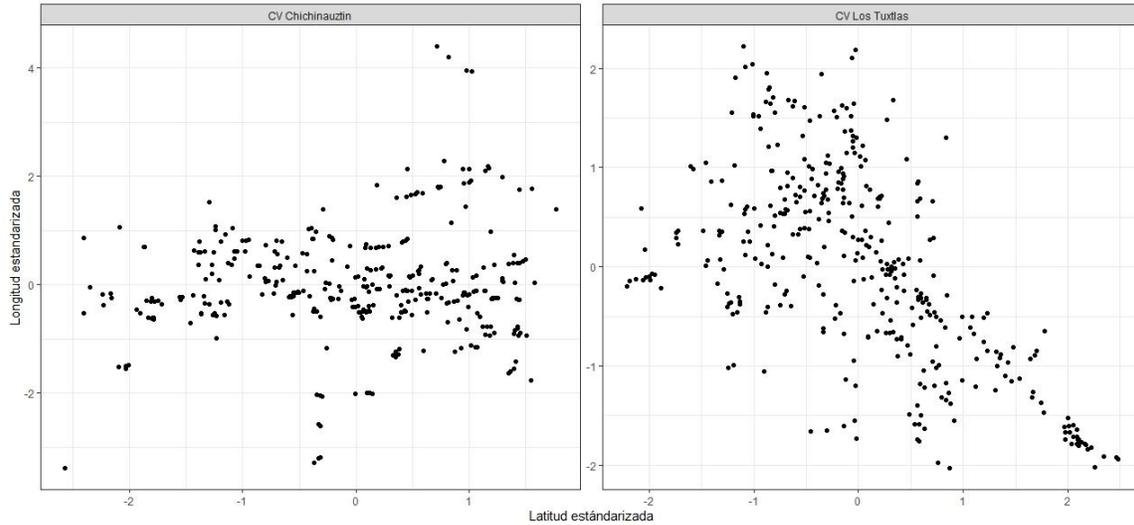
Fuente: Elaboración propia.

La intensidad espacial de un campo volcánico, λ , es el número esperado de puntos por unidad de área (valor de λ depende de la unidad de medida). Para conocer a la intensidad primero consideramos a las ubicaciones de los volcanes como un patrón puntual espacial.

Esto es posible, ya que un campo volcánico cumple con los requisitos fundamentales para considerarse como tal, como es la ventana de observación (límites del campo) y los puntos incluidos en la ventana de observación (ubicaciones de los volcanes). Para poder comparar mejor la distribución de los volcanes individuales (puntos) en los dos campos, se transformaron las coordenadas originales mediante una estandarización z (**Figura 3**).

La estandarización z transforma a los datos a una escala común dada por la desviación estándar de las coordenadas originales (**Figura 2**). Es decir, la transformación de los datos y su escalamiento están en función de su variabilidad en el espacio. Con la estandarización z se preservan las posiciones relativas entre los volcanes (puntos) en cada campo, pero ahora se pueden comparar las configuraciones de puntos en el espacio, debido al nuevo sistema que ahora tiene un “mallado” común y por lo tanto comparable.

Figura 3
 Coordenadas estandarizadas de las ubicaciones de los volcanes



Fuente: Elaboración propia.

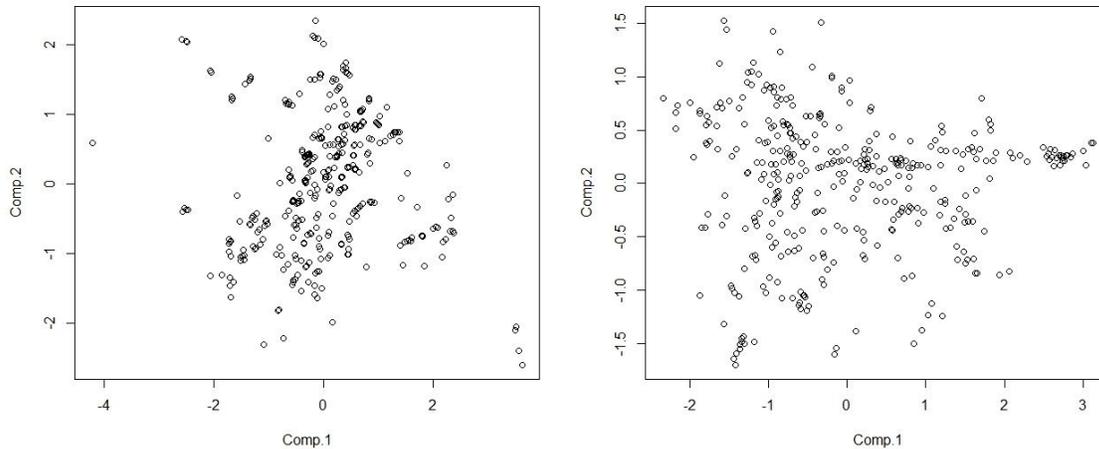
Posteriormente, se orientaron las ubicaciones de los volcanes individuales hacia los ejes de máxima variabilidad. Esto se hizo con el método de componentes principales (**Figura 4**).

Los eigenvectores de la matriz de correlaciones de las ubicaciones espaciales de los volcanes indican las direcciones de máxima variabilidad y que son ortogonales entre ellas. De manera tradicional, el método de componentes principales se aplica para reducir la dimensionalidad (Kambhatla y Leen, 1997). Sin embargo, en este caso lo usamos para orientar a los patrones puntuales hacia las direcciones de máxima variabilidad.

La metodología de patrones puntuales espaciales considera que existe un mecanismo aleatorio, éste genera las ubicaciones de eventos en el plano, Diggle (2013). En nuestro caso hemos orientado los patrones puntuales hacia los ejes de máxima variabilidad, mediante componentes principales, para que la comparación entre los dos campos solo considere la heterogeneidad de las ubicaciones relativas de los volcanes. Implícitamente, lo que estamos haciendo es desarrollar un procedimiento de comparación de las posiciones relativas de los volcanes entre los campos volcánicos ya que –de la inspección de la **Figura 1**– es evidente que los campos no son isotrópicos: Sierra Chichinautzin presenta mayor dispersión de sus volcanes en la dirección oeste-este, mientras que Los Tuxtlas presenta mayor dispersión en la dirección noroeste-sureste. Se dice que un proceso puntual espacial tiene isotropía cuando su distribución de probabilidad es invariante a rotaciones ortogonales de los ejes.

Figura 4

Coordenadas estandarizadas de las ubicaciones de los volcanes orientadas hacia los ejes de máxima variabilidad



Fuente: Elaboración propia.

A las ubicaciones de los volcanes de cada campo volcánico, orientadas hacia los ejes de máxima variabilidad, se les ajustó un modelo de proceso Poisson no homogéneo. Se eligió ajustar un modelo de proceso Poisson no homogéneo debido a que en vulcanología se ha documentado que los campos volcánicos de volcanes de pequeño volumen tienden a agruparse en el espacio (Connor *et al.*, 2000).

Así, el proceso puntual espacial de las ubicaciones de los volcanes lo modelamos con procesos Poisson no homogéneos. Los modelos ajustados de proceso Poisson no homogéneo para cada campo volcánico se obtuvieron modelando a la intensidad con un modelo polinomial saturado de segundo grado en las coordenadas $x =$ primer componente principal, $y =$ segundo componente principal (**Figura 4**). Esos modelos polinomiales se simplificaron mediante el método de selección de variables hacia atrás.

Las intensidades espaciales ajustadas a los campos volcánicos se compararon con una prueba de significancia de permutaciones, para lo cual se propuso como un estadístico de prueba ad hoc basado en el cociente de verosimilitudes de los modelos ajustados a cada campo. Los detalles del estadístico de prueba se presentan en el apéndice. Los pasos que involucra la prueba de permutaciones se describen a continuación: Se plantea la hipótesis nula.

H_0 : Los dos campos volcánicos tienen la misma intensidad

Si esta hipótesis nula es verdadera, entonces las ubicaciones de los volcanes en la **Figura 4** no dependen del campo volcánico. Es decir, la ubicación de cada volcán no depende del campo volcánico al que pertenece. Bajo este supuesto, el valor del cociente de verosimilitudes (el estadístico de prueba) sólo refleja la asignación al azar de los volcanes a los campos volcánicos. Así, una prueba de permutaciones para comparar a las intensidades de los campos volcánicos está dada por el siguiente algoritmo:

1. Calcula el valor del cociente de verosimilitudes con las ubicaciones de los volcanes dada en la **Figura 4**.
2. Elige al azar 356 volcanes del total de 724 volcanes y asígnales la etiqueta Chichinautzin. A los 368 restantes volcanes asígnales la etiqueta Los Tuxtlas. Esta nueva agrupación de las ubicaciones se conoce como una permutación de los volcanes.
3. Calcula el valor del cociente de verosimilitudes con la permutación de los volcanes obtenida en 3.
4. Repite los pasos 2 y 3 un número “grande” M de veces. La distribución de los valores resultantes del cociente de verosimilitudes se conoce como la distribución de permutaciones del cociente de verosimilitudes.
5. Sea N el número de los valores del cociente de verosimilitudes en la distribución de permutaciones que son mayores o iguales que el valor del cociente de verosimilitudes calculado en 1. El p-valor de la prueba es:

$$p - \text{valor} = \frac{N + 1}{M + 1}$$

Entre más pequeño es el p-valor, más grande es la evidencia empírica de que la hipótesis nula es falsa. Para más detalles sobre las pruebas de permutaciones véase Good (2013).

Se eligió al cociente de verosimilitudes como estadístico de prueba porque es el que se utiliza en los modelos de proceso Poisson no homogéneos ajustados a campos volcánicos (Wackerly *et al.*, 2002; Baddeley, 2015). La expresión del cociente de verosimilitudes que se utilizó se presenta en el apéndice.

2. Resultados

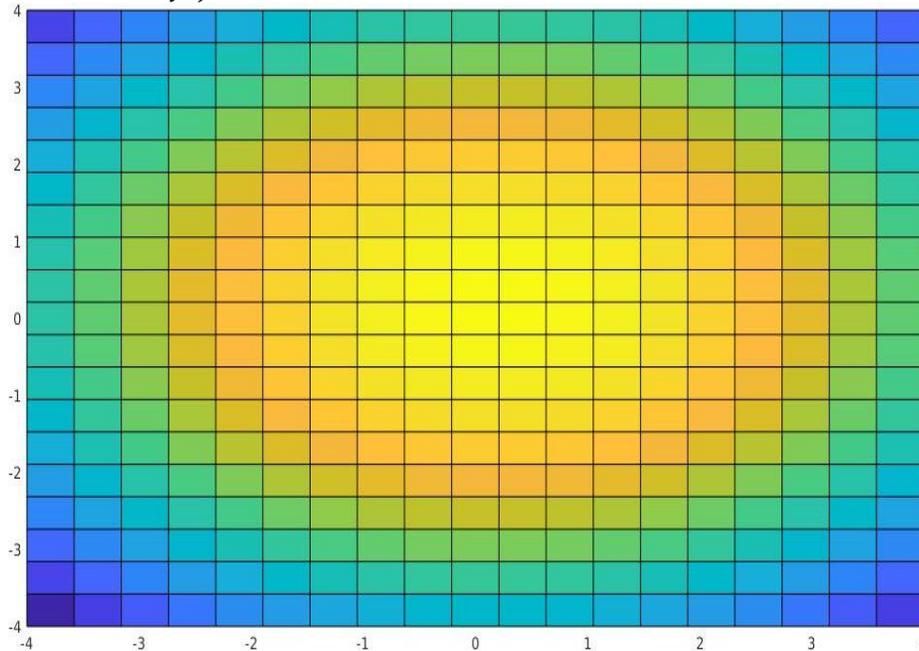
La máxima variabilidad de los datos, o ubicaciones de volcanes individuales dentro de Los Tuxtlas es hacia el NW-SE, mientras que en La Sierra Chichinautzin es hacia el E-W. Después de la transformación realizada (**Figura 3**) las ubicaciones de los volcanes están en términos de las desviaciones estándar. Entonces, al transformar los datos, se conserva el fenómeno considerando como eje principal las desviaciones estándar de las distancias entre los volcanes. Esto hace posible analizar la información para las estimaciones de intensidad. En la **Figura 3** vemos que la Sierra Chichinautzin tiene de -2 a 2 en el eje x y -4 a 4 en el eje y ; mientras que Los Tuxtlas tiene de -2 a 3 en el eje x y en el eje y tiene de -2 a 2 aproximadamente. Chichinautzin tiene, por ende, más variabilidad entre las distancias entre sus volcanes, lo que indica que están más separados los volcanes entre ellos a diferencia de Los Tuxtlas, que están más cercanos entre sí.

Las curvas de nivel de las intensidades no homogéneas Poisson ajustadas a los campos volcánicos se presentan en las **Figuras 5** y **6**. Para Sierra Chichinautzin, se identifica que los volcanes están más separados entre sí en comparación con Los Tuxtlas.

Esto indica que hay una mayor distancia entre eventos y por ende también una menor intensidad espacial en comparación con el modelo ajustado para el campo volcánico de Los Tuxtlas. Las estimaciones de intensidad del modelo Poisson no homogéneo ajustado al campo volcánico de Sierra Chichinautzin en la parte central se estiman entre 1 a 1.4 volcanes por unidad de área. La intensidad espacial de Los Tuxtlas alcanza un rango en la parte central de entre 1.2 a 1.5 eventos por unidad de área (cada unidad tiene una cuadrícula de 100*100 celdas). En las zonas lejanas a la parte central se presenta una intensidad estimada de entre 0.07 a 1 eventos por unidad de área.

Figura 5

Curvas de nivel de la intensidad Poisson ajustadas al campo volcánico Chichinautzin, $\hat{\lambda}_{Chi}(x, y) = \exp(0.42 - 0.03x^2 - 0.12y^2)$



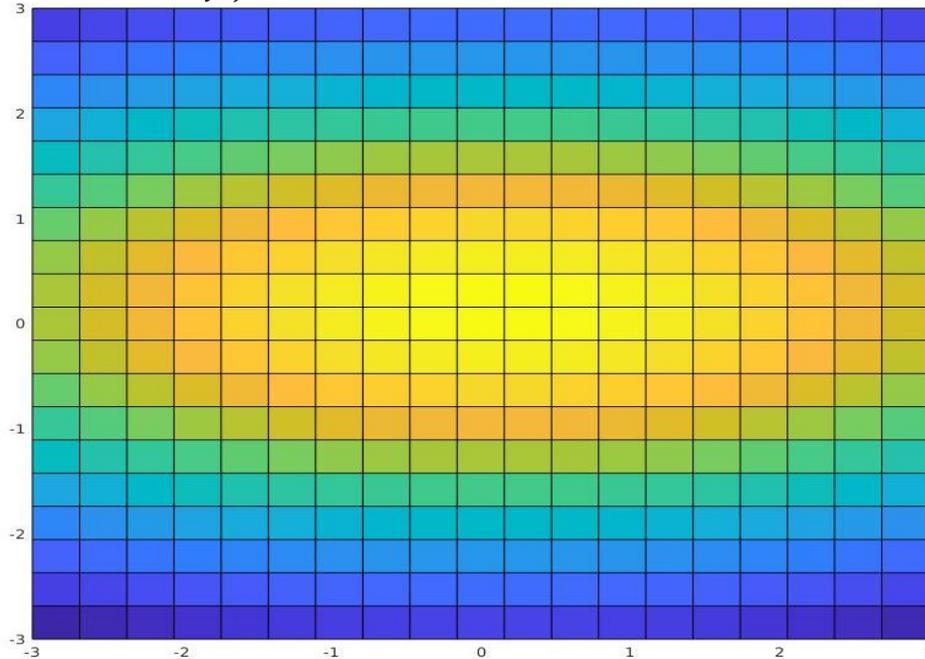
Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con las estimaciones de intensidad calculadas para ambos campos volcánicos, el de Los Tuxtlas presenta un mayor agrupamiento de los volcanes individuales en comparación con los del campo volcánico Sierra Chichinautzin, que tiene una menor intensidad y muestra una mayor distancia entre volcanes.

En la **Figura 7** se muestra la distribución de permutaciones del cociente de verosimilitudes para comparar las intensidades de los campos volcánicos. El histograma es la distribución de permutaciones del cociente de verosimilitudes, la línea negra suave es la densidad de la distribución que se aproxima a una distribución ji-cuadrada con tres grados de libertad. Los grados de libertad se calculan del número de coeficientes del modelo bajo la hipótesis alterna menos el número de coeficientes del modelo bajo la hipótesis nula.

Figura 6

Curvas de nivel de las intensidades Poisson ajustadas al campo volcánico Los Tuxtlas, $\hat{\lambda}_{LT}(x, y) = \exp(0.40 - 0.045x^2 - 0.053y^2)$



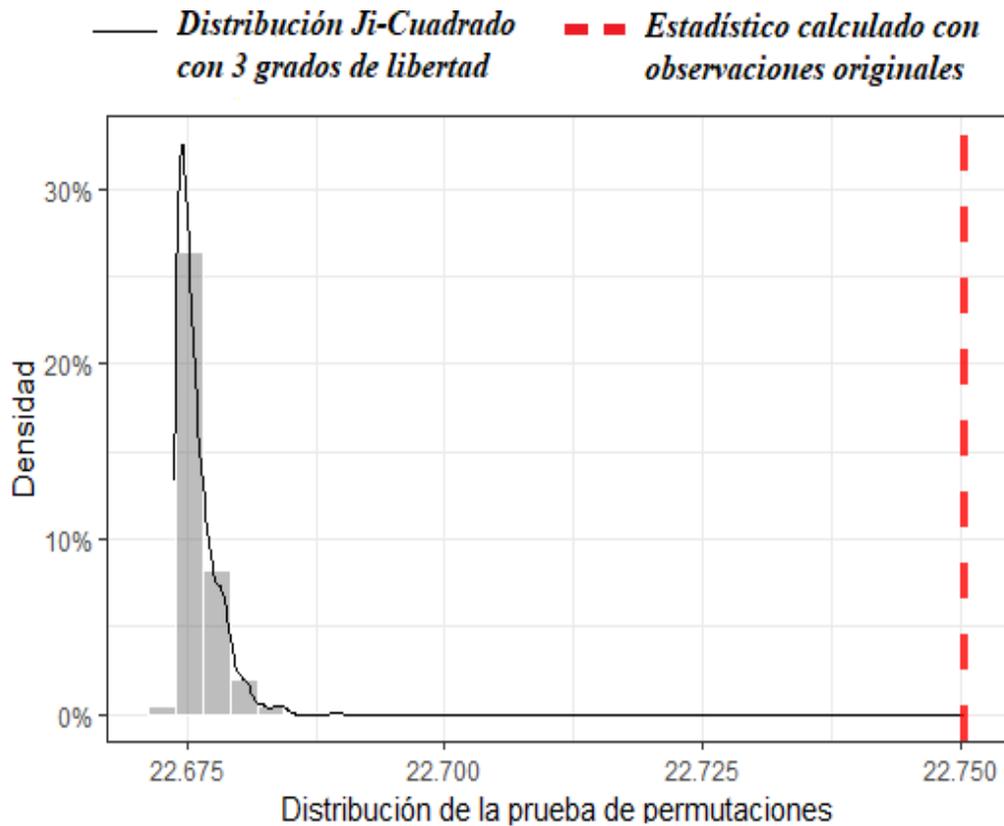
Fuente: Elaboración propia.

La línea punteada roja es el valor del cociente de verosimilitudes calculado de las observaciones originales que es igual a 22.75. Resulta que ningún valor de los cocientes de verosimilitudes calculados en las muestras de permutación fue mayor que el valor del cociente de verosimilitudes observado en los datos espaciales.

De modo que en $M = 1000$ permutaciones el p-valor es igual a 0.0009. Lo anterior, nos lleva a rechazar la hipótesis nula de igualdad de intensidades espaciales de los campos volcánicos. Se puede afirmar que las intensidades espaciales de los campos volcánicos Sierra Chichinautzin y los Tuxtlas son diferentes.

Figura 7

Distribución de permutaciones del cociente de verosimilitudes



Fuente: Elaboración propia.

3. Discusión

El enfoque de análisis de comportamiento de la intensidad espacial de campos volcánicos ya se ha abordado anteriormente en la literatura; Ho y Smith (1998), Cappello *et al.* (2012), Becerril *et al.* (2013) y Cappello *et al.* (2013).

Las estimaciones de intensidad en estos trabajos se realizan mediante un modelado no paramétrico con estimaciones de densidad kernel. También hay trabajos recientes que proponen metodologías alternativas para la comparación de las intensidades espaciales de campos volcánicos, como es el caso de Sieron *et al.* (2023); aquí se comparan las intensidades y densidades espaciales de los campos volcánicos de Sierra Chichinautzin y Los Tuxtlas mediante componentes principales, metodologías SIG (point density tool) y estimación de densidad kernel bivariado. Los ajustes con kernel presentan mayor flexibilidad y generalmente una mayor calidad en los ajustes de intensidad.

Otras técnicas empleadas en la comparación de campos han sido por Mazzarini *et al.* (2010), en donde se busca la comparación de los campos volcánicos de Michoacán-Guanajuato y Sierra Chichinautzin mediante métodos de estadística multivariada.

Los resultados obtenidos en este trabajo fueron similares a los obtenidos en Sieron *et al.* (2021) para el campo volcánico de Los Tuxtlas en donde se identifica que la mayor intensidad espacial se presenta en la parte central del campo volcánico. También hay coincidencia con los resultados de Mazzarini *et al.* (2010) en cuanto al comportamiento de agrupación autosimilar entre los campos volcánicos identificado con métodos con invarianza a transformaciones de escala. Es importante mencionar que enfocar la atención en los agrupamientos autosimilares después de una transformación puede resultar inconveniente y puede llevar a resultados equivocados. Lo anterior es posible evitarlo mediante la comparación de modelos ajustados que conserven la invarianza a la escala y empleando métodos robustos de comparación de intensidad espacial como las pruebas de hipótesis.

Así también los ajustes con kernel obtenidos en los resultados de la investigación de Sieron *et al.* (2023) presentan una mejor calidad en el comportamiento espacial de los campos volcánicos, a diferencia de los ajustes presentados en este trabajo que son más rígidos. Sin embargo, se trata de compensar esa cualidad mediante la prueba de permutaciones. Por otro lado, las estimaciones de intensidad espacial de los modelos de proceso Poisson no homogéneos son mayores en el campo volcánico de Los Tuxtlas en comparación con la Sierra Chichinautzin. Las ubicaciones espaciales de los campos volcánicos en el trabajo de Sieron *et al.* (2023) se analizan y comparan de manera separada y de manera descriptiva mediante ajustes de densidad kernel bivariado con estimación de ancho de banda SAMSE. Lo anterior motivó a realizar este trabajo para proponer una prueba estadística robusta que permita comparar las intensidades espaciales de los campos volcánicos y comparar los resultados.

Para el problema planteado en esta investigación, la comparación de la distribución espacial de volcanes en dos campos volcánicos no fue posible la aplicación de las diferentes metodologías de comparación de patrones puntuales espaciales existentes en la literatura tales como los de Ripley (1977), Besag y Diggle (1977), Ripley (1979), Diggle *et al.* (2000), y Hahn (2012), ya que dichos métodos tienen como base fundamental la estimación de la función K de Ripley. Dicha función parte de la estimación de la distancia entre los puntos, por lo que se asume igualdad de tamaño de área entre los patrones puntuales espaciales. En este caso los patrones puntuales espaciales que forman los campos volcánicos tienen diferente tamaño de área de estudio.

En este trabajo, se propone una prueba de permutaciones para comparar las intensidades espaciales. Estas pruebas también se emplean en Diggle *et al.* (2000) y Hahn (2012).

Sin embargo, nuestra propuesta es diferente ya que utilizamos a la verosimilitud de los modelos Poisson no homogéneos ajustados a cada campo volcánico. Se observó que la distribución de permutaciones del cociente de verosimilitudes es similar a una distribución ji-cuadrada. El método para comparar las intensidades de los patrones puntuales espaciales que forman los campos volcánicos en este trabajo tiene como característica fundamental que considera a las posiciones relativas entre los volcanes y no las distancias entre ellos, como en los métodos de comparación de patrones puntuales espaciales mencionados anteriormente.

4. Conclusiones

De acuerdo con los resultados obtenidos, es posible afirmar que las intensidades espaciales de los campos volcánicos de Sierra Chichinautzin y Los Tuxtlas no son iguales. Igual que en estudios anteriores con métodos discutidos en la sección anterior, se demuestra que Los Tuxtlas tienen una mayor intensidad espacial que La Sierra Chichinautzin. Las razones de la diferencia de intensidad en dos campos volcánicos considerados ambos activos, con una edad similar y tipos de volcanes predominantes han sido discutido en trabajos anteriores como Sieron *et al.* (2023) y comprenden el régimen tectónico que a su vez influye la tasa de ascenso de magma, así como el grosor de la corteza subyacente.

En cuanto a los métodos estadísticos para comparar la intensidad espacial de campos volcánicos de forma precisa, se puede decir el método de patrones puntuales espaciales resulta una alternativa atractiva para tratar de modelar la aleatoriedad espacial de los fenómenos volcánicos.

Debido a su naturaleza paramétrica, la modelación no paramétrica de la intensidad, mediante kernels y matriz de ancho de banda, pueden tener la ventaja de tener mayor flexibilidad y por ende aportar mejores ajustes al comportamiento de los campos volcánicos. Una diferencia importante de los métodos kernel y el kriging, es que tiene como eje central las distancias entre los puntos.

En este trabajo, el método de patrones puntuales espaciales tiene como eje central un proceso Poisson para el número de eventos por unidad de área. Sin embargo, no se tiene actualmente acceso a un método que compare estimaciones de densidad kernel mediante una prueba de hipótesis o métodos más robustos. De acuerdo con lo anterior, el método propuesto en este trabajo mediante patrones puntuales espaciales representa una alternativa con una prueba de hipótesis para la comparación de intensidades espaciales volcánicas.

Así mismo, de manera parcial, la prueba de permutaciones compensa los ajustes rígidos de los modelos paramétricos de procesos Poisson no homogéneo. Nuestra propuesta permite hacer comparaciones entre intensidades espaciales paramétricas polinomiales, como recomienda Baddeley (2015). Pero nuestra comparación va más allá de lo exploratorio, ya que aporta un nivel de significancia, un p-valor, a los resultados sobre las comparaciones de las intensidades espaciales.

Referencias

- Baddeley, A., Rubak, E. y Turner, R.** (2015). *Spatial point patterns: methodology and applications with R*. CRC Press.
- Baddeley, A., and Turner, R.** (2005). Spatstat: An R package for analyzing spatial point patterns.
- Bebbington, M.** (2009). Volcanic Eruptions: Stochastic Models of Occurrence Patterns. En R. Meyers, (Ed.), *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. (pp. 9831–9861). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_580

- Becerril, L., Cappello, A., Galindo, I., Neri, M. y Del Negro, C. (2013).** Spatial probability distribution of future volcanic eruptions at El Hierro Island (Canary Islands, Spain). *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 257, 21-30.
- Besag, J. y Diggle, P. J. (1977).** Simple Monte Carlo tests for spatial pattern. *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics*, 26(3), 327-333.
- Boots, B. y Getis, A. (1988).** Point Pattern Analysis. En Thrall, G. I. (Ed.), *The Web Book of Regional Science* (Web version, pp. 8-69). WVU Research Repository.
- Cappello, A., Bilotta, G., Neri, M. y Negro, C. (2013).** Probabilistic modeling of future volcanic eruptions at Mount Etna. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 118(5), 1925-1935.
- Cappello, A., Neri, M., Acocella, V., Gallo, G., Vicari, A. y Del Negro, C. (2012).** Spatial vent opening probability map of Etna volcano (Sicily, Italy). *Bulletin of Volcanology*, 74, 2083-2094.
- Connor, C. (1990).** Cinder Cone Clustering in the TransMexican Volcanic Belt: Implications for Structural and Petrologic Models. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 95(B12), 1653. https://digitalcommons.usf.edu/geo_facpub/1653
- Connor, C., Conway, F. y Sigurdsson, H. (2000).** Basaltic volcanic fields. En H. Sigurdsson (Ed.), *Encyclopedia of Volcanoes* (2a ed., pp. 423-439). Academic Press.
- Diggle, P. (2013).** *Statistical analysis of spatial and spatio-temporal point patterns*. CRC press.
- Diggle, P. J., Mateu, J. y Clough, H. (2000).** A comparison between parametric and non-parametric approaches to the analysis of replicated spatial point patterns. *Advances in Applied Probability*, 32(2), 331-343.
- Doob, J. (1990).** *Stochastic Processes*. Wiley.
- Ferrari, L., Orozco-Esquivel, T., Manea, V. y Manea, M. (2012).** The dynamic history of the Trans-Mexican Volcanic Belt and the Mexico subduction zone. *Tectonophysics*, 522, 122-149.
- Gelfand, A. E., Diggle, P., Guttorp, P. y Fuentes, M. (2010).** *Handbook of spatial statistics*. CRC press.
- Good, P. (2013).** *Permutation tests: a practical guide to resampling methods for testing hypotheses*. Springer Science & Business Media.
- Hahn, U. (2012).** A studentized permutation test for the comparison of spatial point patterns. *Journal of the American Statistical Association*, 107(498), 754-764.
- Ho, C. y Smith, E. (1998).** A spatial-temporal/3-D model for volcanic hazard assessment: application to the Yucca Mountain region, Nevada. *Mathematical geology*, 30, 497-510.
- Hopkins, J., Smid, E., Eccles, J., Hayes, J., Hayward, B., McGee, L., Wijk, K., Wilson, T., Cronin, S., Leonard, G., Lindsay, J., Nemeth, K. y Smith, I. (2021).** Auckland Volcanic Field magmatism, volcanism, and hazard: a review, *New Zealand Journal of Geology and Geophysics*, 64(2-3), 213-234.
<https://doi.org/10.1080/00288306.2020.1736102>
- Jaimes-Viera, M., Del Pozzo, A., Layer, P., Benowitz, J. y Nieto-Torres, A. (2018).** Timing the evolution of a monogenetic volcanic field: Sierra Chichinautzin, Central Mexico. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 356, 225-242.
<https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2018.03.013>

- Kambhatla**, N. y **Leen**, T. (1997). Dimension reduction by local principal component analysis. *Neural computation*, 9(7), 1493-1516.
<https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.7.1493>
- Le Corvec**, N., **Spörli**, K., **Rowland**, J. y **Lindsay**, J. (2013). Spatial distribution and alignments of volcanic centers: clues to the formation of monogenetic volcanic fields. *Earth-Science Reviews*, 124, 96-114.
<https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2013.05.005>
- Mazzarini**, F., **Ferrari**, L. y **Isola**, I. (2010). Self-similar clustering of cinder cones and crust thickness in the Michoacan-Guanajuato and Sierra de Chichinautzin volcanic fields, Trans-Mexican Volcanic Belt. *Tectonophysics*, 486(1-4), 55-64.
- R Core Team** (2024). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>
- Ripley**, B. (1977). Modelling spatial patterns. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39(2), 172-192.
- Ripley**, B. (1979). Tests of randomness for spatial point patterns. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 41(3), 368-374.
- Sieron**, K., **Guilbaud**, M., **Zarazúa-Carbajal**, M. y **Juárez-Cerrillo**, S. (2023). Monogenetic volcanism in subduction settings: comparative statistical study of the Sierra Chichinautzin and Los Tuxtlas Volcanic Fields in Mexico. *Bulletin of Volcanology*, 85(2), 14. <https://doi.org/10.1007/s00445-023-01625-4>
- Sieron**, K., **Juárez Cerrillo**, S., **González-Zuccolotto**, K., **Córdoba-Montiel**, F., **Connor**, C., **Connor**, L. y **Tapia-McClung**, H. (2021). Morphology and distribution of monogenetic volcanoes in Los Tuxtlas Volcanic Field, Veracruz, Mexico: implications for hazard assessment. *Bulletin of Volcanology*, 83(7), 47. <https://doi.org/10.1007/s00445-021-01467-y>
- Steele**, J. (2001). *Stochastic calculus and financial applications (Vol. 1)*. Springer.
- Wackerly**, D., **Mendenhall III**, W. y **Scheaffer**, R. (2002). *Estadística matemática con aplicaciones*. Cengage Learning.

Apéndice

Sean $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ las localizaciones de los volcanes del campo Chichinautzin. La verosimilitud de un proceso de Poisson puntual espacial para este proceso puntual espacial es

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \lambda_{Chi}(x_i, y_i; \beta) \exp \left\{ - \int_{-2}^2 \int_{-4}^4 \lambda_{Chi}(x, y; \beta) dx dy \right\}$$

donde $\lambda_{Chi}(x, y; \beta) = e^{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 y^2 + \beta_5 xy}$ con $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5) \in \Theta = \mathbb{R}^6$ y la región de observación es el rectángulo $S = [-2, 2] \times [-4, 4]$. De manera similar se construye la verosimilitud para las localizaciones del campo Los Tuxtlas $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_m, v_m)\}$

$$L(\gamma) = \prod_{i=1}^m \lambda_{LT}(u_i, v_i; \gamma) \exp \left\{ - \int_{-2}^2 \int_{-4}^4 \lambda_T(u, v; \gamma) dudv \right\}$$

donde $\lambda_{LT}(u, v; \gamma) = e^{\gamma_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 u^2 + \gamma_4 v^2 + \gamma_5 uv}$ con $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_5) \in \Theta = \mathbb{R}^6$. La hipótesis nula es $H_0: \lambda_{Chi} = \lambda_{LT}$. Bajo la hipótesis nula, sea $\lambda = \lambda_{Chi} = \lambda_{LT}$ la densidad común que gobierna al proceso de Poisson de ambos campos. Entonces podemos unir las observaciones de ambos campos y tener la verosimilitud

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \lambda(x_i, y_i; \theta) \prod_{i=1}^m \lambda(u_i, v_i; \theta) \exp \left\{ - \int_{-2}^2 \int_{-4}^4 \lambda(x, y; \theta) dx dy \right\}$$

donde $\lambda(x, y; \theta) = e^{\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 x^2 + \theta_4 y^2 + \theta_5 xy}$ con $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_5) \in \Theta = \mathbb{R}^6$. Si las intensidades son diferentes pero las localizaciones de los volcanes entre los campos son independientes entonces formamos la verosimilitud conjunta

$$L(\beta, \gamma) = L(\beta)L(\gamma).$$

El estadístico de prueba es el cociente de verosimilitudes

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)}{\max_{\beta \in \Theta, \gamma \in \Theta} L(\beta, \gamma)} = \frac{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)}{\max_{\beta \in \Theta} L(\beta) \max_{\gamma \in \Theta} L(\gamma)}$$

Todo el procesamiento computacional en este trabajo se hizo con R. En particular, la prueba de permutaciones se programó con R (R Core Team, 2024) y el cociente de verosimilitudes lo calculamos numéricamente con el paquete de R spatstat de Baddeley y Turner (2005).